

Aplicação do método de limitadores de inclinação para leis de conservação - Equações de águas rasas

Ana Caroline da Silva Paula¹  & Daniel G. Alfaro Vigo² 

(1) Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Informática, Avenida Athos da Silveira Ramos 274, Prédio do CCMN, Cidade Universitária 21941-916, Rio de Janeiro – RJ, Brasil. E-mail: anacarolinesilva@ufrj.br

(2) Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Computação, Avenida Athos da Silveira Ramos 274, Prédio do CCMN, Cidade Universitária 21941-916, Rio de Janeiro - RJ, Brasil. E-mail: dgal-faro@dcc.ufrj.br

Paula A.C.S. & Vigo D.G.A. (2022) Aplicação do método de limitadores de inclinação. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 6(edição especial 1): e1873.
<http://dx.doi.org/10.29215/pecen.v6i1.1873>

Editora acadêmica: Claudia Mazza Dias. **Recebido:** 26 janeiro 2022. **Aceito:** 16 junho 2022. **Publicado:** 02 setembro 2022.

Resumo: O presente trabalho apresenta um estudo aplicado a problemas modelados por leis de conservação, com condições iniciais e de contorno apropriadas. Em particular, abordaremos a aplicação de métodos limitadores com ênfase no método limitador de inclinação na solução das equações de águas rasas no caso linear e não linear. Apresentamos através de exemplos numéricos um estudo comparativo do comportamento de diferentes funções limitadoras.

Palavras-chave: Leis de conservação, Métodos limitadores, Equações de águas rasas.

Application of the slope limiters method for conservation laws - Shallow water equations

Abstract: The present work presents a study applied to problems modeled by conservation laws, with appropriate initial conditions and contours. In particular, we will approach the application of limiting methods with emphasis on the slope limiting method in the solution of the shallow water equations in the linear and non-linear case. We present, through numerical examples, a comparative study of the behavior of different limiting functions.

Key words: Conservation laws, Limiting methods, Shallow water equations.

Introdução

As Leis de conservação são equações diferenciais parciais (EDP's) que estão presentes em muitos problemas nos campos da Matemática Aplicada e da Físico-Matemática. É um assunto desafiador pois, envolve domínios matemáticos desde a análise à geometria do problema. Na grande maioria dos problemas as equações a ser estudadas são não lineares ou quase lineares, o que torna a modelagem mais sofisticada e desafiadora. Segundo a literatura apresentada em Cuminato (2013), LeVeque (1992) e Bezerra (2003), nas leis de conservação ou equações hiperbólicas as soluções podem apresentar descontinuidades que se propagam ao longo do tempo; dificultando o cálculo de soluções aproximadas utilizando o método de diferenças finitas. Na busca de apresentar soluções aproximadas de qualidade a pesquisa nessa área, evoluiu na direção dos métodos de volumes finitos. A seguir temos a representação geral de um sistema de leis de conservação

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

onde \mathbf{u} é um vetor de k componentes que dependem das variáveis t (tempo) e x (espaço), e \mathbf{f} é a função fluxo $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Equações como estas são denominadas leis de conservação em comparação de sistemas representados na física, tendo como preocupação a conservação de uma grandeza física (energia, momento,...). Neste trabalho abordaremos as leis de conservações hiperbólicas linear e não linear do sistema de equações de águas rasas que possui uma única variável espacial.

Para o caso de leis de conservação lineares, quando consideramos o fluxo como $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ em que \mathbf{A} é uma matriz constante, a Eq.(1) toma a forma $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0$.

Se temos uma única lei de conservação ou seja apenas uma equação, obtemos a equação de advecção $u_t + au_x = 0$ que descreve a propagação de uma onda unidirecional com velocidade a . No caso vetorial (várias leis de conservação) o sistema linear é dito hiperbólico se a matriz \mathbf{A} é diagonalizável e todos seus autovalores são reais. Neste caso a solução exata pode ser obtida explicitamente já que o sistema pode ser transformado em um sistema desacoplado de equações de advecção. Para o caso não linear podemos escrever Eq.(1) como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

sendo $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{u})$ é a matriz jacobiana do fluxo, em que

$$\nabla_{\mathbf{u}} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_k} \right)$$

considerando $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ uniformemente diagonalizável com autovalores reais para cada \mathbf{u} . Neste caso as soluções podem ser descritas mediante expressões que dependem de forma não linear da própria solução, esses aspectos contribuem para a presença de descontinuidades, assunto abordado em Richardson (1911), Berezovski, A., Engelbrecht, J. & Maugin, G. A. (2000) e Menezes (1996) aplicado ao nosso estudo.

Metodologia

Nossa proposta de pesquisa é um estudo direcionado ao sistema de equações de águas rasas linear e não linear e a solução numérica das mesmas.

Além disso, revisitaremos conceitos sobre sistemas de leis de conservação e realizaremos um estudo comparativo de eficácia de esquemas de alta ordem baseados em métodos limitadores. A ideia é generalizar a formulação do caso linear para o caso não linear, no entanto, deparamos com o fato de como escolher um fluxo numérico para o problema não linear, pois o desenvolvimento para solução de equações não lineares são às vezes mais complexos e menos gerais do que é possível para os problemas lineares.

A plataforma utilizada para realizar as simulações apresentadas neste trabalho é o Google Colaboratory, também chamado de Colab, que é um ambiente de notebooks Jupyter que não requer configuração e é executado na nuvem. É um serviço gratuito hospedado pelo Google para incentivar a pesquisa de Aprendizado de Máquina e Inteligência Artificial.

Equações de Águas Rasas

As equações de águas rasas descrevem o movimento de um fluido incompressível com superfície livre. Com base nos estudos apresentados na literatura de Alvarez, A. C., Meril, A. & Valiño-Alonso (2012) e Crowhurst (2013) a respeito dessas equações no caso linear e não linear considerando as equações unidimensional, observamos que o modelo é constituído por equações de conservação que são originadas das equações de conservação de massa e de momento linear. O sistema de equações de águas rasas é composto por duas equações diferenciais parciais não lineares da forma

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + gh_x = 0. \end{cases}$$

Considerando a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ as soluções na forma de perturbações do estado de equilíbrio com h_0 e v_0 constantes, obtemos a linearização das equações e assim temos o sistema de leis de conservações linearizado

$$\begin{cases} h_t + v_0 h_x + h_0 u_x = 0, \\ u_t + v_0 u_x + g h_x = 0. \end{cases}$$

No caso do sistema linear a onda pode se propagar sem mudar sua forma, já no caso não linear a própria velocidade, amplitude pode mudar a propagação. Embasados na teoria apresentada no artigo Alvarez, A. C., Meril, A. & Valiño-Alonso (2012) utilizamos o estudo apresentado para analisarmos as equações de águas rasas não linear.

Métodos limitadores

Para a solução das equações hiperbólicas os esquemas de alta resolução são de grande importância, estes podem ser obtidos a partir de esquemas conservativos os quais produzem soluções aproximadas que convergem para solução viscosa e resolvem as discontinuidades. Os esquemas na maioria dos casos são de segunda ordem de precisão nas seções suaves da solução, capazes de resolver os pontos de discontinuidades presentes. Um exemplo de esquema conservativo é o método de Godunov onde as funções de fluxo numérico são obtidas a partir da solução de problemas de Riemann locais em cada subintervalo da discretização espacial. Este método garante o posicionamento correto das discontinuidades e produz um esquema numérico conservativo. No entanto apresenta

uma dificuldade com relação a exigência de uma solução exata de uma sequência de problemas de Riemann a cada passo tempo, desta forma há um alto custo computacional, pois nem sempre as soluções desses problemas de Riemann são triviais, pois envolvem o cálculo de autovalores.

Os métodos TVD (Total Variation Diminishing) são de grande interesse para o desenvolvimento da metodologia deste trabalho, estes métodos por sua vez tem estratégia evitar o aparecimento de novas oscilações a cada passo de tempo. Para um esquema ser TVD ele deve ser conservativo, pelo que a limitação impede o surgimento de novas oscilações nos extremos. Este método só pode ser de primeira ordem, caso queiramos que seja de segunda ordem, temos que combinar métodos de segunda ordem e limitadores. Este mecanismo reduz as oscilações nas descontinuidades numéricas sendo capaz de aproximar a solução de forma mais acurada.

Partimos do sistema de leis de conservação Eq.(1) e consideramos sua aproximação por volumes finitos. Sendo $\mathbf{U}_j(t)$ a aproximação dos valores $u(x_j, t)$ da solução e $\mathbf{F}(y)$ o fluxo numérico com a propriedade

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(x)) = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} \mathbf{F}(y) dy$$

diferenciando em ambos os lados obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}(x))}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}(x + \frac{h}{2}) - \mathbf{F}(x - \frac{h}{2})}{h}.$$

Introduzindo a representação $\mathbf{F}_{j \pm \frac{1}{2}} = \mathbf{F}(x_j \pm \frac{h}{2})$ chegamos na forma conservativa

$$\frac{d\mathbf{U}_j}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{h} = 0.$$

Para escolha do fluxo numérico a literatura apresenta vários tipos a serem utilizados entre eles como exemplo os fluxos de Lax–Friedrichs, Lax–Wendroff e Roe.

Fluxo de Lax-Friedrichs é dado por

$$F(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{\alpha}{2}(v - u).$$

Esse fluxo numérico é monótono, se $\alpha \geq \max_w |f'(w)|$, garantindo a estabilidade e recuperação da solução de entropia. Se o esquema é monótono e se possui propriedades TVD garante a estabilidade e recuperação da solução de entropia.

Fluxo de Lax–Wendroff para o caso não linear é menos imediato tem como fluxo

$$F(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{k}{2h} f'(\bar{u})(f(v) - f(u))$$

onde $\bar{u} = \frac{u+v}{2}$.

Fluxo de Roe é utilizado para o caso de sistemas não lineares. Consideramos um fluxo numérico via linearização, $\mathbf{f}^*(\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}^* \mathbf{u}^*$, sendo \mathbf{A}^* uma matriz diagonalizável e os resultados do problema linear de Riemann, apresentado na literatura Hesthaven (2018) nos apresenta o fluxo numérico de Roe

$$\mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_l) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{A}^*| (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l)$$

em que $|\mathbf{A}^*|$ representa a matriz valor absoluto correspondente à matriz \mathbf{A}^* .

Os dois primeiros fluxos foram apresentados para o caso de uma lei de conservação, a extensão para um sistema de leis de conservação do fluxo Lax–Wendroff é obtida substituindo $f'(\bar{u})$ pelo Jacobiano do fluxo $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}$ avaliado em $\bar{\mathbf{u}}$ e para o fluxo de Lax–Friedrichs modificando o α para incluir a dinâmica das ondas múltiplas considerando $\alpha \geq \max_{\mathbf{w}}(\mu_{max})$ em que $\mu_{max} = \max_l |\mu_l(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{w}))|$ e $\mu_l(\mathbf{A})$ representam os autovalores da matriz \mathbf{A} .

Os métodos limitadores podem ser classificados como, limitador de inclinação inspirado no método de volumes finitos; mas iremos fazer uma abordagem usando o limitador de fluxo inspirado no método de Godunov. O método de Godunov consiste em uma discretização na forma conservativa e a evolução da solução é obtida através da resolução de problemas de Riemann Cuminato (2013). Especificamente a solução no tempo t_{n+1} é obtida como

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{v}_j^n - \frac{\Delta t}{h} [\mathbf{F}(\mathbf{v}_{j+1}^n, \mathbf{v}_j^n) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j-1}^n)],$$

obtido diretamente da lei de conservação, onde utilizamos a solução numérica para t_n para construir uma função constante por partes $\mathbf{v}_j^n = \bar{\mathbf{v}}(x, t_n)$ em $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ resolvendo um problema de Riemann.

Um método mais eficiente, em que não é necessário resolver o problema de Riemann a cada passo, é dado pelo esquema monótono centralizado para leis de conservação (MUSCL). Neste caso se supõe que a solução em cada célula $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ pode ser expressa como um polinômio linear, sendo $\frac{\delta u_j}{h}$ a inclinação da solução

$$\mathbf{u}_j(x) = \bar{\mathbf{u}}_j + \left(\frac{x - x_j}{h} \right) \delta \mathbf{u}_j.$$

A representação do esquema MUSCL é apresentada por Hesthaven (2018)

$$\bar{\mathbf{u}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_j^n - \frac{\Delta t}{h} [\mathbf{F}(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-, \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^-, \mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^+)]$$

a ideia do método é escolher o incremento que precisa garantir a propriedade TVD. Considerando

$$\mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^+ = \bar{\mathbf{u}}_j - \gamma_{j-\frac{1}{2}} \delta \mathbf{u}_j^n$$

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- = \bar{\mathbf{u}}_j + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \delta \mathbf{u}_j^n$$

sendo para o caso linear $\gamma_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1+\lambda}{2}$, $\gamma_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1-\lambda}{2}$ e $\lambda = \frac{ak}{h}$, e os incrementos são obtidos usando a função minmod LeVeque (1992). Obtemos que

$$\delta \mathbf{u}_j^n = \frac{1}{h} \text{minmod} \{ (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n), (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) \},$$

onde a função minmod é definida por

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } |a| < |b|, ab > 0 \\ b, & \text{se } |b| < |a|, ab > 0 \\ 0, & \text{se } ab < 0 \end{cases}$$

Temos então que a escolha das inclinações é o elemento fundamental, pois precisamos considerar a precisão, estabilidade e garantir que o método é TVD, para isso impomos limites sobre as inclinações através das funções limitadoras.

Análise dos resultados

Nesta seção apresentaremos o exemplo investigado na aplicação dos esquemas limitadores de inclinação ao sistema de águas rasas. Como vimos anteriormente esquemas limitadores são usados em esquemas de alta resolução, atua nos fluxos do sistema, evita oscilações que de outra forma ocorreriam com esquemas de discretização espacial de alta ordem devido a choques, descontinuidades ou mudanças bruscas no domínio da solução. E os esquemas limitadores de inclinação é usado quando o limitador atua nos estados do sistema (como pressão, velocidade, momento).

Reescrevemos o sistema de equações de águas rasas não lineares na seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = 0. \end{cases}$$

No primeiro caso, consideramos como condição inicial o seguinte problema de Riemann

$$h(x) = \begin{cases} h_l, & \text{se } 0 \leq x \leq x_0 \\ h_r, & \text{se } x_0 < x \leq L \end{cases}$$

com $h_l \leq h_r$, e $u(x) = 0$. Esse problema modela o rompimento instantâneo de uma barragem entre dois reservatórios, em que o fundo é plano e não há atrito.

Tomamos os seguintes parâmetros para a barragem: $h_l = 0.005\text{ m}$, $h_r = 0.001\text{ m}$, $x_0 = 5\text{ m}$, $L = 10\text{ m}$ e $T = 6\text{ s}$. Temos nesse problema que $h_r \neq 0$, escolhemos os parâmetros da discretização $h = L/n_x$ com $n_x = 1024$ e $CFL = 0.99$.

Os resultados são apresentados a seguir Figura 1 e Figura 2.

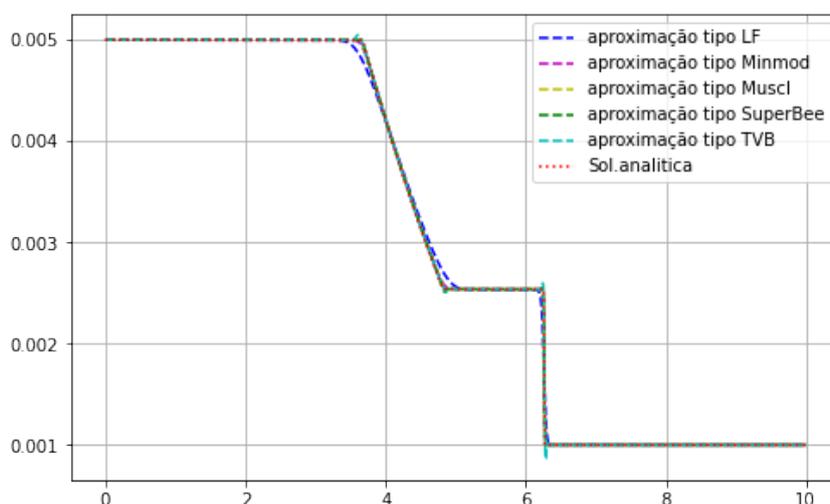


Figura 1: Gráfico de comparação Solução analítica e aproximações, Limitação Lax-Fredrichs, minmod, MUSCL, SuperBee e TVB. Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento de cada aproximação, MUSCL e SuperBee tem comportamento parecidos com o minmod, porém este demora a capturar uma solução, já, os outros dois capturam uma solução no tempo 6.2 à 6.3. TVB possui um bom comportamento dentre todos, no entanto acha solução somente no tempo 6.4 à 6.6. Podemos dizer que ambos os tipos apresentam resultados característicos ao longo do tempo, aplicados aos parâmetros adotados.

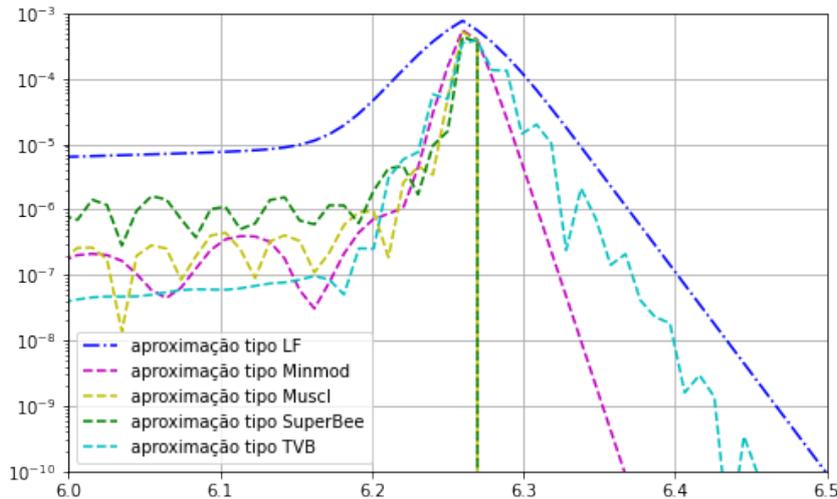


Figura 2: Gráfico de Erro aproximações. Fonte: Elaborada pelo autor.

No segundo caso, temos o rompimento instantâneo da barragem que separa um reservatório de uma região seca. Vejamos as condições modificadas aplicadas ao problema de Riemann. Temos $u(x) = 0$, sendo h_l a altura da água no reservatório.

$$h(x) = \begin{cases} h_l > 0, & \text{se } 0 \leq x \leq x_0 \\ h_r = 0, & \text{se } x_0 < x \leq L \end{cases}$$

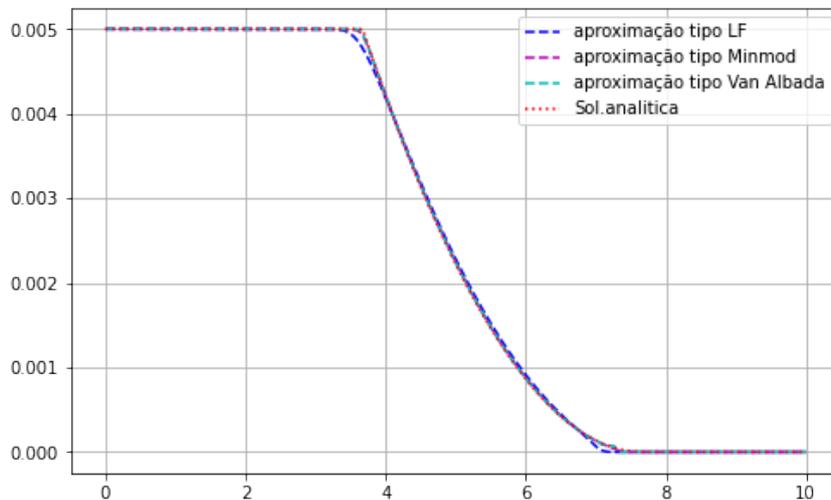


Figura 3: Gráfico de comparação solução analítica e as aproximações Lax-Fredrichs, minmod e Van Albada, com $h_r = 0$ e $CFL = 0.50$. Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparamos os casos 1 e 2, ambos para a mesma discretização e aproximações, percebemos que o problema com $hr = 0$ nesta aplicação possui algumas limitações em meio a discretização e os parâmetros adotados. Observamos que Lax-Friedrichs e minmod possui um melhor desempenho perto dos outros limitadores, ambos refinam bem as equações e capturam uma solução aproximada, através da Figura 3 e Figura 4 observamos que ambos tipos encontram solução no tempo $t = 7.50$ a $t = 7.75$ e Lax-Friedrichs captura melhor as não linearidades.

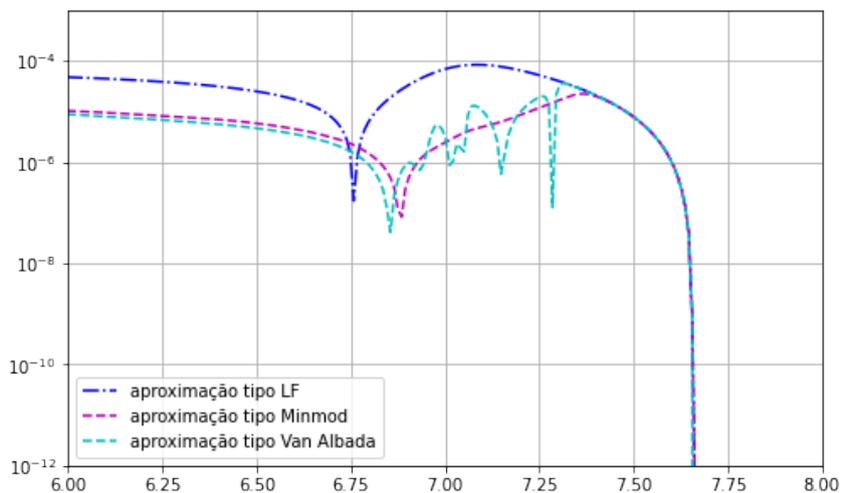


Figura 4: Gráfico de Erro, aproximação limitadores para o caso das barragens com h_r igual zero. Fonte: Elaborada pelo autor.

Os métodos aplicados no problema anterior não apresentam eficácia comparada ao método Lax-Friedrichs e minmod, isso ocorre por ser um caso especialmente delicado, pois $h_r = 0$, e nem todos os tipos possuem funcionalidade sobre o problema testado. No entanto fizemos alguns testes e observamos que ao mudarmos alguns parâmetros temos alguns resultados interessantes e relevantes, por exemplo alguns tipos de funções de limitação funcionam perante a mudança de alguns parâmetros. Analisamos um caso interessante modificando o parâmetro $CFL = 0.50$ e $N = 1024$ as funções limitadoras de Van Alba e minmod sendo aplicado juntamente com Lax-Friedrichs, apresentam bons resultados sendo a minmod o que se comporta melhor.

Conclusões

Neste trabalho apresentamos o método limitador de inclinação e o aplicamos ao sistema de equações de águas rasas. Diferentes funções limitadoras foram usadas em dois casos de estudo, os melhores resultados foram obtidos em ambos os casos usando a função limitadora minmod. No segundo caso de estudo, devido à singularidade do problema alguns limitadores não funcionam corretamente.

No futuro, com o avanço nos estudos iremos analisar o comportamento desse método na aproximações de outras soluções das equações de águas rasas. Em particular, iremos estudar as soluções de tipo soliton generalizado apresentadas em Alvarez, A. C., Meril, A. & Valiño-Alonso (2012).

Agradecimentos

Agradecemos aos avaliadores pelos comentários construtivos e ao evento ERMAC e a Revista PECEN pela oportunidade.

Referências

- Alvarez, A. C., Meril, A. & Valiño-Alonso (2012) Step Soliton Generalized Solutions of the Shallow Water Equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2012 (910659): 1–24.
- Berezovski, A., Engelbrecht, J. & Maugin, G. A. (2000) Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. World Scientific Pub. Co., Singapore.
- Bezerra, D. de J. (2003) Métodos Numéricos para Leis de Conservação. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Cuminato, J. A. & Meneguette Jr., M. (2013) Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de diferenças finitas. Editora SBM, Rio de Janeiro.
- Crowhurst, P. & Li, Z. (2013) Numerical Solutions of One-Dimensional Shallow Water Equations (pp. 55–60). *In: UKSim 15th International Conference on Computer Modelling and Simulation*, IEEE.
- Hesthaven, J.S. (2018) Numerical Methods for Conservation Laws. SIAM, Philadelphia.
- LeVeque, R.J. (1992) Numerical Methods for Conservation Laws, 2a. edição. Birkhäuser Basel.
- Menezes, L. A. P. (1996) Estudo de Esquemas de Alta Resolução em Algoritmos Simultâneos e Seqüenciais. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina.
- Richardson, L. F. (1911) On the approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 210: 307–357.