Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza / Centro de Formação de Professores / Universidade Federal de Campina Grande

Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza
9: e2150 (2025)
Research and Teaching in Exact and Natural Sciences

ARTIGO

ISSN 2526-8236 (edição online)
Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza

Queda livre, Regra de Merton e o Estudo de Caracterização das Funções Quadráticas com o PhET

Diego Soares Monteiro, Jean Felipe de Assis, Natália Pedroza & Igor Valadares de Souza Ferreira

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Centro de Educação e Humanidades, Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira, Rua Barão de Itapagipe 96, Rio Comprido 20261-005, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: diego_smonteiro@hotmail.com, jeanuerj@gmail.com, npsnatalia@gmail.com

Monteiro D.S., Assis J.F., Pedroza N. & Ferreira I.V.S. (2025) Queda livre, Regra de Merton e o Estudo de Caracterização das Funções Quadráticas com o PhET. *Pesquisa e Ensino em Ciências Exatas e da Natureza*, 9(2025): e2150. https://doi.org/10.56814/pecen.v9ic.2150

Editor acadêmico: Paulo Xavier Pamplona. **Recebido**: 27 setembro 2024. **Aceito**: 09 janeiro 2025. **Publicado**: 16 janeiro 2025.

Resumo: Este artigo é resultado de uma monografia e de estudos teóricos sobre três tendências na Educação Matemática (História da Matemática, Modelagem e Tecnologia), as quais visam promover uma maior interação dos alunos com os temas abordados. Nosso objetivo é oferecer ao professor uma proposta pedagógica interdisciplinar para a caracterização de funções quadráticas por meio das taxas de variação, considerando o estudo de corpos em queda livre e a Regra de Merton. Utilizamos a plataforma PhET para sugerir simulações e a execução de algumas etapas do processo de modelagem matemática. Para a obtenção do modelo matemático algébrico, propomos uma sequência de atividades baseadas em uma transposição didática realizada a partir do método empregado na resolução de problemas de valor inicial modelados por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa fundamentada teórica e metodologicamente na modelagem matemática no ensino. Como resultado, temos um material didático em consonância com as pesquisas realizadas no ensino de matemática nas últimas décadas.

Palavras chave: História da Matemática, Modelagem Matemática, Tecnologia no Ensino de Matemática.

Free Fall, Merton's Rule, and The Study of Characterizing Quadratic Functions with PhET

Abstract: This article is the result of a monograph and theoretical studies on three trends in Mathematics Education (History of Mathematics, Modeling, and Technology), which aim to promote greater interaction between students and the topics covered. Our goal is to offer teachers an interdisciplinary pedagogical proposal for the characterization of quadratic functions through rates of change, considering the study of free-falling bodies and Merton's Rule. We used the PhET platform to suggest simulations and the implementation of certain steps in the Mathematical Modeling process. To obtain the algebraic mathematical model, we propose a sequence of activities based on a didactic transposition derived from the method used in solving initial value problems modeled by second-order ordinary differential equations. The research adopts a qualitative approach, theoretically and methodologically grounded in Mathematical Modeling in Education. As a result, we have produced educational material in line with research conducted in mathematics teaching over the past decades.

Key words: History of Mathematics, Mathematics Modelling, Technology and Math Education.

Introdução

O presente artigo resulta da monografia de um discente da Universidade do Estado do Rio de Janeiro conjuntamente com reflexões dos professores autores sobre as possibilidades e necessidades de abordar o teorema de caracterização das funções quadráticas de forma diferenciada, considerando seus desenvolvimentos históricos associados a problemas das ciências naturais.

O trabalho tem como objetivo apresentar ao professor de matemática ou de física um material didático interdisciplinar para a caracterização das funções quadráticas, tendo como base a modelagem da queda livre de corpos. O material proposto visa estimular o espírito crítico e científico do estudante, estando em consonância com as tendências em Educação Matemática, as quais pretendem dar respostas sobre o processo de ensino-aprendizagem na área. Desse modo, ao estudarmos o desenvolvimento teórico das propostas matemáticas a partir dos fenômenos de queda livre, a partir de seus pressupostos históricos, adaptam-se propostas pedagógicas em conexão com as etapas dos processos de modelagem com o uso de tecnologias didáticas contemporâneas.

Atualmente, a modelagem matemática desempenha não apenas um papel de método científico para pesquisas, mas também destaca-se como uma estratégia de ensino, conforme proposto por Bassanezi (2022). Contudo, quando pensamos na realidade do ensino, sabemos que para estudar diversos fenômenos e situações, frequentemente é necessário recorrer a laboratórios e equipamentos, que nem sempre estão disponíveis nas instituições. Além disso, os professores de matemática podem não estar familiarizados com o manuseio desses recursos. Uma alternativa que ganhou destaque nos últimos anos são as propostas pedagógicas experimentais com tecnologias. Conforme observado por Borba & Penteado (2019), o trabalho com modelagem e o enfoque experimental sugere a existência de pedagogias que se harmonizem com as diversas mídias, explorando suas potencialidades.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância do uso de tecnologias em sala de aula, bem como suas potencialidades, as competências e habilidades esperadas dos estudantes. Dado que a presente proposta se destina à 1ª série do ensino médio, destacam-se as seguintes habilidades e competências previstas na BNCC:

> usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdo em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (Brasil 2018: 475).

Este trabalho além de propor uma conexão das funções quadráticas com o problema da queda livre dos corpos, combina o uso da tecnologia (PhET) e desenvolvimentos históricos das interpretações dos fenômenos, *e.g.*, a Regra de Merton, para que através do processo de modelagem matemática, o estudante possa compreender o comportamento de uma função quadrática e de sua taxa de variação. O material didático produzido tem como pilar uma das formas de resolução de problemas de Cauchy modelados por equações diferenciais lineares de segunda ordem, que consiste em reescrever a equação como um sistema de equações de primeira ordem (Boyce & DiPrima 2010). Em nosso material, tal sistema é gerado pela equação da velocidade média e outra pela aceleração; evitamos, assim, o processo de integração, ao adaptarmos para usos didáticos a Regra de Merton. Ressaltamos que a proposta pedagógica complementa a abordagem interdisciplinar de caracterização de uma função quadrática presente no livro de Dante (2016).

Nos últimos anos, diversos autores em educação matemática vêm trabalhando por novas abordagens e apresentações de certos conceitos, como por exemplo, o de função. Trabalhos como Rezende (2003, 2008), Mesa & Ochoa (2009), Silva (2009) e Barboza (2013) trazem as ideias de que devemos abordar também na educação básica o conceito de funções afins e quadráticas por meio de taxas de variações, alguns autores buscam ainda a história da matemática como fonte de inspiração para validar seus argumentos. Na apresentação desta pesquisa, consideramos a possibilidade da história da matemática auxiliar em adaptações de abordagens e de metodologias a partir da interpretação de fenômenos conhecidos.

No Ensino Médio, alguns tipos de funções como as: afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são apresentadas aos estudantes. O motivo principal do estudo desses tipos de funções é que elas permitem modelar diversas situações do dia a dia e das Ciências. Tratando, assim, de uma área da matemática aplicada extremamente útil. Contudo, a maioria dos livros didáticos já apresentam as situações contextualizadas, informando o tipo de função a ser usado e não desenvolvem com os alunos a habilidade de selecionar o modelo mais adequado para cada situação. Assim, quando falamos em caracterização de uma função estamos nos referindo a um certo comportamento que é capaz de indicar que aquela função representa um bom modelo para descrever a situação estudada. Em um nível mais avançado, como no curso superior, este é um dos papeis do Cálculo Infinitesimal: tentar obter as funções apropriadas para cada situação a partir das taxas de variação instantâneas das grandezas envolvidas (Rezende 2003).

Três tendências em Educação Matemática: História da matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Modelagem matemática e ensino

História da Matemática

As variadas formas de integrar Matemática, História e Ensino nas práticas didáticas cotidianas permitem estudos mais contextualizados e, portanto, considerações mais profundas e humanas para a apresentação dos saberes científicos (Chaquiam 2017). Tais pressupostos são significativos, não apenas para apresentações e reconstruções intelectuais, mas também para a promoção de abordagens que superem reduções recorrentes a métodos de cálculos e resultados memorizados para facilitar a resolução de problemas artificiais sem qualquer contato com a realidade.

A história da matemática pode auxiliar na apresentação do desenvolvimento conceitual da matemática, também em suas formas sistematizadas, possibilitando interações com outras disciplinas acadêmicas e com diversas expressões culturais. Tais elementos permitem não apenas uma satisfação a respeito das origens, desenvolvimentos e transmissão das teorias matemáticas, mas fornecem subsídios importantes para as práticas pedagógicas, em especial em diálogos contextualizados com nossas heranças culturais (Vianna 1998).

Segundo D'Ambrosio (1996), entender a história da matemática é fundamental em qualquer diálogo sobre a disciplina e seu ensino. Ter uma noção, mesmo que imprecisa, de porque e quando o ensino da matemática ganhou a importância atual é essencial para propor inovações na educação matemática. Essa importância é particularmente evidente no contexto do conteúdo curricular, frequentemente composto por conceitos isolados, desconexos e desprovidos de contexto. Motivar os discentes para uma ciência aparentemente estática torna-se cada vez mais desafiador, e a história da matemática emerge como um elemento motivador.

Pode-se buscar na história da matemática, as ideias centrais e os momentos históricos que evidenciam a evolução dessa ciência e de certos conceitos dela. Compreender a matemática como algo vivo, em desenvolvimento e sujeito a erros e acertos humanos, pode levar a reflexões acerca dos processos de ensino-aprendizagem. Assim, a história da matemática pode dar subsídios para a criação de aulas de matemática focando em conteúdos específicos dessa ciência ou em trabalhos de natureza interdisciplinar. Ainda de acordo com Ubiratan D'Ambrosio:

> É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico (D'Ambrosio 1996: 31).

As vastas produções matemáticas na contemporaneidade e suas aplicações evidenciam que não se trata de uma área do saber que esteja morta. Por outro lado, ao utilizarmos considerações, modelos e sistematizações pretéritas em sala de aula, estamos constantemente em risco de tratarmos de uma tradição vazia, sem significado profundo na atualidade e, portanto, morta em nossos meios de escolarização. A matemática não é uma relíquia do passado, mas um patrimônio vivo da humanidade, constantemente recriada para o entendimento e transformação das realidades humanas. Desse modo, adaptar problemas seletos no desenvolvimento das teorias matemáticas é um importante meio para buscar construir uma experiência matemática em nossas salas de aula, as quais integram a construção do saber científico e nossas constituições culturais. Desse modo, apresentamos uma maneira de abordar as funções quadráticas a partir de uma compreensão das taxas de variação sem a necessidade de recorrer aos métodos sistematizados pelas equações diferenciais em cursos de nível superior, permitindo um olhar crítico para as interpretações do fenômeno de queda livre, seus ajustes teóricos e validações a partir de adaptações da Regra de Merton.

Tecnologias da Informação e Comunicação

A presença de diversos meios tecnológicos no ensino de Matemática tem sido investigada por muitos anos, especificamente os processos de mediação na constituição de uma experiência matemática contextualizada e adequada aos níveis cognitivos dos participantes dos ambientes pedagógicos. Tais prerrogativas, portanto, aliam-se a propostas investigativas a partir das práticas discentes, em que os meios tecnológicos possibilitem interações, inferências e verificação de resultados (Romero 2017). As atividades com mediação tecnológica permitem coleta de dados, interpretações possíveis, análise de hipóteses, proposição teórica e verificação de resultados. Desse modo, além de desenvolver atividades relacionadas ao pensamento crítico, pode-se priorizar elementos essenciais para uma experiência matemática, possuindo, ao mesmo tempo, elementos pedagógicos relevantes e desafios inerentes ao processo científico (Romero 2017).

Observa-se, assim, que as tecnologias no ensino de matemática auxiliam: **i)** na resolução de problemas específicos, suas interpretações, análises e aprofundamentos (Santos-Trigo *et al.* 2019); **ii)** na promoção de elementos criativos na contextualização e na resolução de problemas, os quais permitam intuições, inferências e sistematizações (Vale *et al.* 2018); **iii)** na extensão de sentido dos resultados matemáticos e seus efeitos na vida dos estudantes em seus variados processos de formação humana (Freiman 2018) e **iv)** no diálogo transdisciplinar ao propor conjecturas a partir de análise de dados específicos (Hartnell & Knights 2011).

Segundo Borba *et al.* (2020), estamos em uma fase em que as tecnologias estão presentes nos ambientes escolares e sociais, possibilitando desdobramentos investigativos nas propostas de ensino-aprendizagem de matemática. Observa-se, assim, como a utilização de variados softwares possibilitam experimentação e a visualização, promovendo diferentes aplicações no cotidiano escolar. Desse modo, verifica-se como ferramentas de geometria dinâmica ajudam na percepção de propriedades e relações estabelecidas, especificamente a partir de manipulações dos próprios discentes, auxiliando em etapas importantes para a aprendizagem (Giraldo *et al.* 2013). Destaca-se, todavia, a necessidade de uma compreensão pedagógica para que as limitações técnicas possam iluminar possíveis interpretações e investigações matemáticas que contribuam para uma atitude crítica no processo de tratamento da informação e formação dos conceitos (Giraldo *et al.* 2013).

As propostas pedagógicas experimentais com tecnologias ganharam destaque nos últimos anos. Dentre essas considerações, destacamos a utilização do PhET como um laboratório digital no desenvolvimento de uma atividade. Trata-se de um *software* desenvolvido pela Universidade do Colorado em Boulder (*University of Colorado Boulder*) com o intuito de fazer simulações de fenômenos físicos, químicos, biológicos e problemas matemáticos. O PhET tem como objetivo permitir uma melhor visualização e compreensão de diversos fenômenos. Os laboratórios didáticos permitem diversos tipos de experimentos, de análises e de desenvolvimento teóricos. Azevedo (2009), por exemplo, apresenta a seguinte classificação:

demonstrativos; quantitativos com aparatos de montagem simples; quantitativos com aparatos de montagem sofisticados; problematizadores; e reconstrução de aparatos históricos. Segundo o autor, os experimentos do tipo problematizadores têm as seguintes características: atividades experimentais que adotam uma abordagem de ensino investigativa. Aqui, o experimento desempenha um papel crucial como elo entre os conteúdos a serem ensinados e o conhecimento e experiências dos discentes, manifestados através de suas interpretações. Em nossa abordagem, a partir da utilização do PhET, objetivou-se a destacar um laboratório virtual que permitisse a realização de experimentos do tipo problematizadores e a criação de atividades de modelagem.

Modelagem matemática e ensino

A caracterização da modelagem matemática tem sido abordada de diversas maneiras e fundamentada em diferentes pressupostos em relação às práticas educativas. Para esta seção, utilizamos como referência Chaves & Espírito Santo (2011), Bassanezi (2022), bem como definições de alguns termos relevantes. Apesar das variadas nuances dos termos, entende-se um modelo como uma tentativa de representar e descrever, de forma quantitativa e/ou qualitativa, o comportamento de um objeto, fenômeno ou situação. Para Bassanezi (2022), a modelagem matemática é a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". No âmbito da Educação Matemática, a modelagem matemática pode ser vista como uma abordagem de ensino que valoriza uma formação intelectual crítica e contextualizada. Visto que o processo de modelagem possui etapas relevantes e específicas, as abordagens pedagógicas devem se atentar aos processos de construção e de validação de modelos na apreensão e na aplicação dos conceitos. Bassanezi (2022) sugere cinco etapas: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação. Conforme Bassanezi (2022), os modelos matemáticos podem ser criados com base na natureza dos fenômenos ou situações e classificados de acordo com a matemática envolvida, tais como: Linear ou Não Linear; Estático; Dinâmico; Educacional; Aplicativo; Estocástico e Determinístico.

Este trabalho destaca o modelo Educacional, conforme definido por Bassanezi (2022):

> [...] baseado em um número reduzido ou simples de suposições, frequentemente com soluções analíticas [...] a virtude destes modelos reside na aquisição de experiência e no fornecimento de ideias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada (Bassanezi 2022: 20).

Ademais, Chaves & Espírito Santo (2011), além de apresentarem uma subdivisão em etapas semelhantes ao modelo de Bassanezi (2022), oferecem orientações práticas para a implementação da modelagem em sala de aula, as quais estão detalhadas no (**Quadro 1**).

Quadro 1. Possibilidade de Modelagem Matemática em Sala de Aula. Fonte: Chaves & Espírito Santo (2011).

ETAPAS DO PROCESSO	POSSIBILIDADE 1	POSSIBILIDADE 2	POSSIBILIDADE 3
Escolha do Tema	Professor	Professor	Professor/discente
Elaboração da Situação-Problema	Professor	Professor	Professor/discente
Coleta de Dados	Professor	Professor/discente	Professor/discente
Simplificação dos Dados	Professor	Professor/discente	Professor/discente
Tradução do Problema/Resolução	Professor/discente	Professor/discente	Professor/discente
Análise Crítica da Solução/Validação	Professor/discente	Professor/discente	Professor/discente

A abordagem adotada na elaboração da proposta didática segue a segunda possibilidade, em que a participação do discente se estende a várias etapas, enquanto ao professor cabe escolher o tema, formular o problema e orientar nas demais fases. Isso porque o objetivo é integrar à experimentação, fatos históricos e tópicos do currículo do ensino básico, especificamente, funções quadráticas.

A Regra de Merton e o Movimento Uniformemente Variado

Na Grécia Antiga, Arquimedes e Aristóteles dedicaram-se ao estudo de problemas relacionados à estática e cinemática, respectivamente, utilizando uma abordagem qualitativa. Essa metodologia influenciou significativamente o desenvolvimento da ciência por um longo período (Boyer & Merzbach 2012). Aristóteles postulava que os corpos se distinguem uns dos outros por suas qualidades e composições (ar, fogo, terra e água) e movem-se naturalmente em direção ao seu elemento constituinte. Por exemplo, um vaso de plantas cai em direção ao centro da Terra devido à predominância de terra em sua composição. Além disso, segundo essa tradição, vasos "mais pesados" cairiam mais rapidamente.

Durante os séculos XIII e XIV, surgiram diversas críticas às conclusões dos estudos de Aristóteles. No século XIV, no Merton College, filósofos escolásticos estavam envolvidos em debates sobre a quantificação de formas "variáveis" em problemas relacionados ao movimento. Eles chegaram a um resultado notável para a taxa de variação uniforme, agora conhecida como a regra de Merton. Este resultado é apresentado por Boyer & Merzbach (2012) da seguinte maneira:

> [...] se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, então a distância percorrida por ele será igual à que seria percorrida por outro corpo, que se deslocasse uniformemente, durante o mesmo intervalo de tempo, com velocidade igual à do primeiro no ponto médio do intervalo de tempo (Boyer & Merzbach 2012: 186).

Na linguagem atual, a afirmação anterior seria interpretada como: a velocidade média é calculada como a média aritmética entre as velocidades inicial e final. Boyer destaca que, mesmo sem os aparatos matemáticos e físicos atualmente disponíveis para quantificar e verificar essas relações, os filósofos escolásticos conseguiram descrever uma relação entre distância, tempo e velocidade média. Implícita nessa descrição estava a ideia de que, em um movimento uniformemente variado, a taxa de variação da taxa de variação permanece constante.

Anos mais tarde, Oresme teve acesso ao resultado mencionado anteriormente e progrediu em seus estudos sobre o movimento, utilizando uma representação que se assemelha ao que hoje compreendemos como um gráfico de uma função. Oresme empregou coordenadas para representar a velocidade em relação ao tempo. Ao considerar um corpo em movimento uniformemente acelerado (com aceleração constante), ele associou instantes de tempo (longitudes) e, para cada momento, traçou perpendicularmente à linha do tempo segmentos representando as velocidades (latitudes), conforme **Figura 1**.

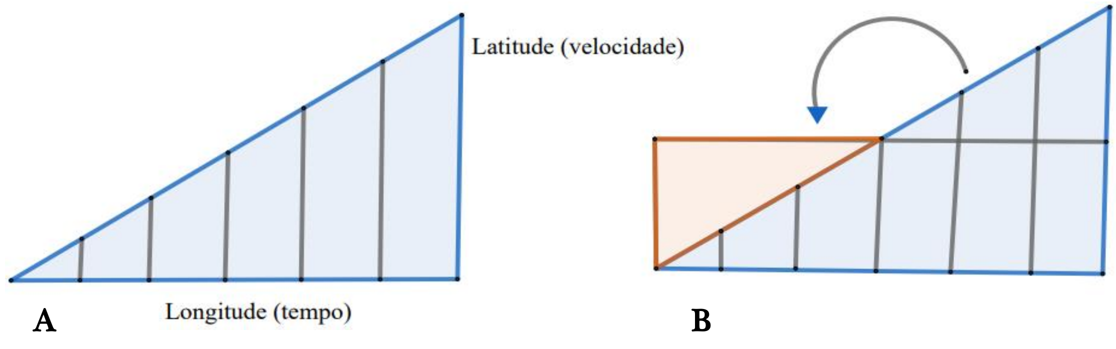

Figura 1. Diagramas do tempo x velocidade para um corpo que se move com aceleração constante: **A**. Representação gráfica feita por Oresme; **B**. Verificação gráfica feita por Oresme para a regra de Merton. Fonte: Adaptada de Boyer & Merzbach (2012).

Um primeiro ponto relevante na representação mencionada é a noção de continuidade, evidenciada pelo traçado contínuo das retas, mesmo que o resultado envolva velocidade média e média aritmética entre os pontos final e inicial (valores discretos). “Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante” (Boyer & Merzbach 2012). A transição da construção de um modelo discreto para um modelo contínuo está relacionada à essência real do problema, algo que Oresme já havia percebido.

Do ponto de vista gráfico, também é evidente que a área durante a primeira metade do intervalo de tempo está na proporção de 1 para 3 em relação à segunda metade do tempo. Se o tempo for dividido em três partes iguais, as distâncias percorridas (áreas) estarão na razão de 1:3:5. Esse padrão continua de maneira geral e Galileu mais tarde observou que as distâncias percorridas estão em uma relação com os números ímpares. Além disso, como a soma dos n primeiros números ímpares consecutivos é o quadrado de n, a distância total percorrida varia de acordo com o quadrado do tempo.

Em “Duas Novas Ciências”, Galileu não apenas fornece definições para os movimentos uniforme e uniformemente variado, mas também apresenta proposições que são demonstradas por meio de argumentos matemáticos e geométricos, acompanhados da descrição quantitativa dos experimentos.

É relevante ressaltar a primeira proposição apresentada no livro sobre o estudo do movimento, a qual já era familiar na Europa medieval:

> O tempo no qual um determinado espaço é percorrido por um móvel que parte do repouso com um movimento uniformemente acelerado é igual o tempo no qual aquele mesmo espaço será percorrido pelo mesmo móvel uniforme, cujo grau de velocidade seja a metade do maior e último grau de velocidade alcançado no movimento uniformemente acelerado (Galilei 1988: 171).

A proposição mencionada já havia sido discutida pelos escolásticos e investigada por Oresme. Ela indicava que o espaço percorrido pelo objeto poderia ser determinado pela área sob a curva do gráfico da velocidade em função do tempo.

A segunda proposição parece mais intrigante do ponto de vista matemático:

> Se um móvel partindo do repouso cai com um movimento uniformemente acelerado, os espaços por ele percorridos em quaisquer períodos pelo mesmo móvel estão entre si numa razão dupla desses mesmos períodos de tempo, a saber, como quadrado desses mesmos tempos (Galilei 1988: 171).

No teorema mencionado, observa-se que a expressão “os espaços por ele percorridos em quaisquer períodos de tempo” não apenas estabelece uma relação entre a variação de duas grandezas, espaço percorrido e tempo, mas também descreve a natureza dessas variações. Em termos contemporâneos, essa descrição seria expressa como: a mudança na distância percorrida é diretamente proporcional ao quadrado da mudança no tempo necessário para percorrê-la, sendo a constante de proporcionalidade igual à metade da aceleração devido à gravidade. Dessa forma, a variação na taxa de variação é constante. Esse resultado matemático é derivado da narrativa de um experimento envolvendo planos inclinados. Ao variar o ângulo de inclinação de uma rampa, Galileu estava simulando e se aproximando do comportamento de um corpo em queda livre. Além de apresentar argumentos que contestavam a física Aristotélica, Galileu introduziu uma nova abordagem científica, baseada em experimentos e em quantificações.

Metodologia

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa e está amparada pelos pressupostos da modelagem matemática. Uma proposta pedagógica direcionada para que o professor (leitor) aplique em sua aula com estudantes da 1ª série do Ensino Médio é apresentada, cujo tema principal é a caracterização de funções quadráticas por meio de um corpo em Movimento Uniformemente Variado (MUV).

A primeira parte da proposta serve como um manual para o professor, onde descrevemos o que é o PhET, o motivo pela escolha do simulador de "Movimento de Projétil" e quais as ferramentas estão disponíveis para a construção da proposta pedagógica.

Na segunda etapa, que é a construção da abordagem pedagógica por meio de uma sequência de atividades, o professor deve orientar o estudante sobre o que vem a ser obter um modelo matemático e as etapas a serem percorridas como a experimentação, coleta de dados, identificação das grandezas envolvidas no problema e a construção do modelo. Por fim, o professor deve conduzir o estudante a estabelecer uma conexão dos conceitos físicos com o comportamento das taxas de variação de uma função quadrática.

Assim, ao final da atividade esperamos que o aluno compreenda que dada uma função quadrática $h(t) = at^2 + bt + c$, ela pode ser caracterizada como a função cuja taxa de variação da taxa de variação da quantidade h em relação a t é constante e diferente de zero (Rezende 2003).

A partir da ideia de Bassanezi (2022) de que o foco principal da modelagem, na educação, não é alcançar um modelo bem-sucedido de imediato, mas, sim, seguir etapas progressivas que sistematizam o conteúdo matemático, em nossa proposta pedagógica, a construção do modelo serve como uma via para estabelecer uma relação entre funções quadráticas, taxas de variação e o fenômeno físico. A atividade proposta apresenta uma abordagem interdisciplinar que é uma característica da modelagem na educação.

A interdisciplinaridade promove a união das disciplinas em um vínculo que as integra, permite o diálogo e facilita a compreensão na construção coletiva do conhecimento ao abordar problemas do cotidiano. A interligação entre as disciplinas fortalece a contextualização e a aprendizagem com significado, conforme preconizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 2000.

> Ao propor uma nova forma de organizar o currículo, trabalhado na perspectiva interdisciplinar e contextualizada, parte-se do pressuposto de que toda aprendizagem significativa implica uma relação sujeito-objeto e que, para que esta se concretize, é necessário oferecer as condições para que os dois polos do processo interajam (Brasil 2000: 22).

Descrição da proposta pedagógica

Apresentamos a proposta em duas etapas: a primeira, é uma contribuição da descrição do simulador para o professor (leitor), que deverá apresentar a plataforma e o simulador escolhido à turma, destacando as ferramentas e como utilizá-las; a segunda, é a sequência das etapas de modelagem que o professor deve propor aos estudantes para construção do modelo matemático, a fim de que possam perceber a caracterização de uma função quadrática.

PhET e a simulação de Movimento de Projétil

O PhET, "Physics Education Technology", é uma plataforma educativa e gratuita, que proporciona aos professores e alunos a realização de simulações interativas de ciências da natureza e matemática.

Em nossa proposta, optamos pelo simulador "Movimento de Projétil" (**Figura 2**), disponível on-line em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/projectile-motion (Colorado 2020) pois este é um dos temas mais recorrentes nos livros de física, bem como nos exercícios dos livros de matemática e nos permite explorar o tópico específico da queda livre dos corpos.

Quando a opção "Lab" é selecionada, o simulador encaminha para uma página com uma disposição similar à ilustrada na (**Figura 3**). Na interface "Lab", encontramos as ferramentas necessárias para a proposta a ser apresentada. Nela encontramos um canhão em uma torre ajustável em altura, permitindo ao usuário personalizar o experimento, juntamente com um controle de ângulo para determinar o ponto de partida do objeto no lançamento. Uma variedade de escolhas está disponível, como a seleção de hipóteses/variáveis, que incluem a resistência do ar, valores distintos para a gravidade e a possibilidade de lançar corpos de diferentes massas, como bala de canhão, bola de golfe, abóbora, carro, humanos, entre outros. O conjunto inclui também um traçador e uma trena: o traçador permite a análise ponto a ponto do tempo, da distância e da altura. É importante observar que o simulador tem algumas limitações, registrando pontos em intervalos de tempo aproximados com duas casas decimais. Com essas ferramentas, é viável medir tanto a altura quanto a distância horizontal do corpo lançado.

Figura 2. Painel da parte de seleção para o uso da simulação de lançamentos.

Figura 3. Demonstração inicial dos recursos do PhET com acessórios adicionais.

Após definir a altura desejada, é possível ajustar o ângulo de lançamento. No entanto, uma limitação deste simulador escolhido é que o ângulo de 0° só pode ser selecionado se a altura do canhão for maior que zero. Quando o botão vermelho é pressionado (localizado na parte inferior e representando o canhão), o projétil é disparado, e sua trajetória é exibida como uma curva em azul. Já o botão amarelo, com o ícone de uma borracha, permite apagar a trajetória, reiniciando todos os procedimentos e possibilitando a realização de um novo experimento. A rapidez inicial, localizada no canto inferior esquerdo, indica a velocidade inicial do objeto a ser lançado. É relevante notar que, dependendo da rapidez inicial, um mesmo objeto pode percorrer trajetórias de distâncias diferentes. É importante destacar que a velocidade inicial pode variar somente de 0 a 30 m/s, assumindo valores inteiros. De posse dessa apresentação de algumas ferramentas da simulação de movimento de projétil, passamos à apresentação da atividade.

Modelagem a partir da observação de Objetos em Queda Livre

Proposta pedagógica para 1ª série do Ensino Médio

A atividade deverá ser feita, preferencialmente, em grupo com pelo menos três integrantes.

Siga as instruções:

I. Abra o link do simulador: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/projectile-motion
II. Clique sobre a atividade e em seguida escolha a interface "Lab"
III. O grupo precisará definir uma posição (altura) para a torre acima do solo e esta posição deverá ser a mesma para todos os integrantes do grupo
IV. Todos devem colocar o canhão virado para baixo formando ângulo de -90° com a horizontal
V. Todos os integrantes, a princípio, devem considerar o mesmo valor para a gravidade.
VI. Cada integrante do grupo deverá escolher o objeto (corpo) o qual deseja abandonar a partir do canhão. Importante que cada integrante escolha um objeto que tenha massa diferente dos demais.
VII. Todos os integrantes, a princípio, devem considerar a velocidade inicial igual a 0 m/s
VIII. Todos os integrantes devem deixar desabilitada a ferramenta "de resistência do ar".

A queda livre é um tipo de movimento que ocorre quando um corpo cai sob a influência exclusiva da gravidade, sem a resistência do ar. Nesse movimento, o corpo é abandonado a partir do repouso (velocidade inicial é zero) e se desloca verticalmente para baixo, devido à aceleração.

- **Experimentação e Abstração**

1) Com base nas instruções acima, clique no botão vermelho com o desenho do canhão e deixe o corpo cair. Utilize o traçador e verifique o tempo que o objeto levou para chegar ao solo. Anote o tempo que você encontrou. Ele é diferente do tempo encontrado pelos demais integrantes do grupo que abandonaram objetos com massas diferentes? O tempo de chegada de um corpo ao solo, em queda livre, depende da massa do corpo?
2) Considere outros valores para a gravidade. O tempo que o objeto levou para chegar ao solo é o mesmo da questão 1?
3) Considere outras posições para a torre. O tempo que o objeto levou para chegar ao solo é o mesmo da questão 1?
4) Considere que o corpo não parte do repouso e atribua outros valores para a velocidade inicial. O tempo que o objeto levou para chegar ao solo é o mesmo da questão 1?
5) Mediante as respostas dadas nas questões 1 até a 4, podemos verificar que o tempo que o objeto leva para chegar ao solo é alterado por quais grandezas?

- **Resolução**

Qual será a função matemática que relaciona a altura do corpo em queda livre para cada instante de tempo?

Siga as instruções:

I. Fixe uma posição para a altura da torre, de preferência, com valores distintos dos demais integrantes
II. Todos devem considerar a gravidade 10 m/s²
III. Pelo menos um integrante do grupo deverá considerar a velocidade inicial zero e pelo menos um integrante deverá considerar a velocidade inicial diferente de zero.

6) Clique no botão vermelho com o desenho do canhão e deixe o corpo cair. Complete o quadro abaixo com os dados coletados com o uso do traçador, para isso, considere que t_i representa o i-ésimo valor para o instante de tempo obtido pelo traçador nos pontos da malha de discretização gerada, automaticamente, pelo simulador sobre o eixo vertical em $n+1$ pontos e $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Sendo que uma malha de discretização representa uma divisão de uma geometria contínua em elementos finitos ($\Delta h_{t+1} = h(t_{i+1}) - h(t_i)$) interligados pelos pontos $h(t_{i+1})$ e $h(t_i)$, onde $h(t_i)$ representa a altura do objeto no instante (t_i) . Por simplicidade, utilizamos a seguinte notação: $h(t_0) = h_0$, $h(t_i) = h_i$ e $v(t_i) = v_i$, onde $v(t_i)$ representa a velocidade instantânea em (t_i).

Quadro I. Coleta de dados.

Tempo (segundos) (t_i)	Distância(metros) (d)	Altura em relação ao solo (metros) (h_i)
$t_0 = 0$	**0**	$h_0 =$
$t_1 =$	**0**	$h_1 =$
t_2=	**0**	$h_2 =$
t_3=	**0**	$h_3 =$
…	**0**	…

7) Utilize uma planilha ou calculadora e complete o quadro abaixo.

Quadro II. O estudo das variações.

Variação absoluta do tempo (Δt)	Variação absoluta da altura (Δh)	Velocidade média ($v_{mi} = \Delta h_i/\Delta t_i$)
$\Delta t_1 = t_1 - t_0 =$	$\Delta h_1 = h_1 - h_0 =$	$v_{m1} =$
$\Delta t_2 = t_2 - t_0 =$	$\Delta h_2 = h_2 - h_0 =$	$v_{m2} =$
$\Delta t_3 = t_3 - t_0 =$	$\Delta h_3 = h_3 - h_0 =$	$v_{m3} =$
…	…	…

A principal característica de um corpo que se encontra em Movimento Uniformemente Variado (MUV) é que sua aceleração é constante e diferente de zero, portanto, aceleração instantânea e aceleração média apresentam o mesmo valor.

8) Obtenha uma lei de formação que determina a velocidade em função do tempo ($v(t_i)$) para cada instante de tempo obtido pelo simulador. Considere a definição de MUV, isto é,

$$-g = -10 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_i - v_0}{t_i - t_0} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (1)$$

Adotamos o sinal de menos para a gravidade uma vez que o movimento de queda do corpo encontra-se em sentido oposto ao adotado como positivo para o eixo vertical ("para cima").

9) Construa o gráfico tempo x velocidade instantânea (v_i), para a função obtida na questão 8 e verifique, graficamente, a Regra de Merton como fez Nicole D'Oresme.

A Regra de Merton estabelece que no MUV a média aritmética (v_{Mi}) entre a velocidade em cada instante de tempo $t_i \neq 0$ e no tempo inicial é igual a velocidade média v_{mi} entre t_i e o instante inicial, isto é,

$$v_{Mi} = \frac{v_i + v_0}{2} = v_{mi} \quad (2)$$

Podemos determinar a velocidade v_i no instante t_i, conhecendo a velocidade média e a inicial, $v_i = 2v_{mi} - v_0 \quad (3)$

A partir da equação (1) e da Regra de Merton (2), temos que para $t_i \neq t_0 = 0$ segue que:

$$v_{Mi} = \frac{v_i + v_0}{2} = \frac{v_0 - gt_i + v_0}{2} = \frac{h_i - h_0}{t_i - t_0} = v_{mi} \quad (4),$$

donde concluímos que $h_i = h_0 + v_0 t_i - \frac{g{t_i}^2}{2}$. Como se trata de quantidades mensuráveis podemos escrever a expressão que calcula a altura em cada instante de tempo $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

10) Obtenha a função que determina a altura para cada instante de tempo a partir das condições iniciais que você adotou. Lembre-se que precisamos explicitar domínio e contradomínio.

- **Validação**

11) Substitua os valores de tempo presentes no quadro da questão 6 em $h(t)$ e verifique se os valores encontrados são iguais aos fornecidos pelo simulador.

No processo de obtenção do modelo acima, consideramos como hipótese que o MUV é definido como aquele que apresenta aceleração constante e diferente de zero e deduzimos que a função que descreve a altura em relação ao tempo é uma função quadrática. Podemos considerar como hipótese que MUV é descrito por uma função quadrática e concluirmos que a taxa de variação da taxa de variação (aceleração) é constante. A partir de (4) temos que para $t_i \neq 0$ e $t_0 = 0$:

$$v_{mi} = \frac{h_0 + v_0 t_i - \frac{g{t_i}^2}{2} - h_0}{t_i - t_0} = v_0 - \frac{g{t_i}^2}{2}.$$

Pela Regra de Merton (2), e por (3), temos que para qualquer $t_i \neq 0$ e $t_0 = 0$ aceleração média e instantânea é dada por:

$$a = \frac{v_i + v_0}{t_i - t_0} = -g.$$

- **Conclusão**

12) Podemos verificar, a partir das questões 7 e 9 e da definição de MUV, que para qualquer valor de tempo t_i e $t_{i+1} \neq 0$ medidos pelo simulador vale a proporção:

$$-g = -10 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{2(v_{m(i+1)} - v_{mi})\blacksquare}{t_{i+1} - t_i} = \frac{2(\Delta h_{i+1}/\Delta t_{i+1} - \Delta h_i/\Delta t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

13) Como você explicaria a relação existente entre o MUV, que tem aceleração constante, isto é, a taxa de variação da taxa de variação da posição em relação ao tempo é constante e funções quadráticas?

A primeira parte da proposta tem como objetivo questionar se a massa de um corpo influencia no tempo de queda dele se desprezarmos a resistência do ar. Como demonstrado por Galileu no século XIV, por meio do Método Científico, essa ideia é falsa e contradiz o senso comum, que intuitivamente tende a aderir ao pensamento aristotélico.

Da questão 1 até a questão 5, desejamos que o estudante identifique quais grandezas influenciam o tempo de chegada do objeto ao solo. Essa fase de Abstração e Experimentação (Bassanezi 2022) ou Coletas de dados e Simplificação (Chaves & Espírito Santo 2011) é fundamental, para que o estudante possa compreender a construção do modelo, as grandezas e variáveis que aparecerão no modelo algébrico que se obtém. Como o foco é trabalhar com corpos em queda livre, a atividade traz a definição desse tipo de movimento.

Após a fase de entendimento de quais variáveis influenciam no tempo de chegada do corpo ao solo, o professor formula a pergunta norteadora para construção do modelo: "Qual será a função matemática que relaciona a altura do corpo em queda livre para cada instante de tempo?" Esse processo que pertence à etapa de Abstração, Bassanezi (2022) define como Problematização.

Na sequência, da questão 6 até a 10, desejamos que os estudantes coletem os dados, representem os na forma tabular e com o auxílio da Regra de Merton, a qual é definida na atividade, consigam traduzir o problema da linguagem natural para linguagem matemática, esta etapa é definida por Bassanezi (2022) como resolução.

Para a finalização do processo de modelagem, questão 12, é necessário que os discentes validem a lei de formação obtida, o que pode ser feito substituindo os valores de tempo na função h e comparar com os da tabela construída pelos valores do simulador. Pode-se, ainda, pedir aos estudantes que calculem o tempo que o objeto leva para chegar ao solo e verificar com o valor fornecido pelo simulador.

Por fim, na questão 13 desejamos que os estudantes relacionem as etapas que foram feitas para obtenção do modelo, que é uma restrição de uma função polinomial do segundo grau, aos conceitos físicos do problema. Assim, a partir da definição de MUV, como o movimento que tem aceleração constante, no caso de estudo a gravidade, e da análise das taxas de variações, como o auxílio da Regra de Merton, concluímos que a função altura é modelada por uma função quadrática. Na atividade, apresentamos também o fato de se partir da hipótese de que o MUV já é modelado por uma função quadrática e concluímos que a taxa de variação da taxa de variação (aceleração) é constante. Ressaltamos que este último caminho já vem sendo apresentado em livros didáticos como Dante (2016), contudo a proposta geral da atividade que é o primeiro caminho, não.

Destacamos que o método de modelagem utilizado se assemelha ao utilizado na resolução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares com condições iniciais (problema de valor inicial). Expressando-o na linguagem do cálculo diferencial, temos: $h'' = -g, h_0 \; e \; v_0$, onde h'' representa a segunda derivada da função altura. A expressão desenvolvida considera o caso especial em que $t_0 = 0$. Caso o tempo inicial seja diferente de zero deverá se utilizar $\Delta t_i = t_i - t_0$, no lugar de t_i. Isso justificaria, por exemplo, o porquê na questão 9, ser substituído $h_i =$

$h(t)$ e consequentemente, t_i por t. Uma abordagem comum para resolver esse tipo de problema é converter a equação diferencial de segunda ordem em um sistema de equações lineares de primeira ordem. No caso em estudo, as equações do sistema foram apresentadas como taxas de variação, onde uma representa a aceleração média e a outra a velocidade média, que podem ser obtidas através do argumento de Oresme. É evidente, pelas concepções do cálculo, que estamos lidando com funções que não só são contínuas, mas também diferenciáveis em todos os pontos do domínio, como é o caso das funções polinomiais. Observe que a continuidade de h, exigida no teorema de caracterização de uma função quadrática, decorre naturalmente do fato de estarmos trabalhando com um problema físico e podermos realizar medições para cada instante de tempo, se assim o simulador permitisse.

Um exemplo numérico

Deixando uma abóbora de 5kg cair e fixando uma altura (h_0) de 15 m, ângulo de -90° e velocidade inicial (v_0) de 0m/s, construímos o **Quadro 2** coletando os dados com as ferramentas de medição do simulador. Para fins numéricos, aconselhamos, neste primeiro exemplo, adotar aceleração da gravidade ($a = -g$) valendo $-10m/s^2$, a escolha é justificada pelo fato de o simulador trabalhar somente com duas casas decimais e aproximar os dados coletados, o que pode dificultar a compreensão da relação existente entre intervalos de tempo e taxas de variação da altura.

Quadro 2. Um exemplo tabular de coleta de dados.

Tempo (segundos) (*t_i*)	**Distância(metros) (*d*)**	**Altura em relação ao solo (metros)(*h_i*)**
t_1 = **0.10**	**0**	h_1 = **14.95**
t_2= **0.20**	**0**	h_2 = **14.80**
t_3= **0.30**	**0**	h_3 = **14.55**
…	**0**	…

A partir dos dados coletados construímos o **Quadro 3**.

Quadro 3. Um exemplo tabular de coleta de dados e o estudo das variações.

Variação absoluta do tempo (Δt) s	**Variação absoluta da altura (Δh) m**	**Velocidade média = ($v_{mi} = \Delta h_i / \Delta t_i$) m/s**
$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 0.10$	$\Delta h_1 = h_1 - h_0 = -0.05$	v_{m1} = -0.5
$\Delta t_2 = t_2 - t_0 = 0.20$	$\Delta h_2 = h_2 - h_0 = -0.20$	v_{m2} = -1.0
$\Delta t_3 = t_3 - t_0 = 0.30$	$\Delta h_3 = h_3 - h_0 = -0.45$	v_{m3} = -1.5
…	…	…

Da definição de MUV, temos que $-g = -10 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_i - v_0}{t_i - t_0}$, portanto, $v_i = -10t_i$. Ao construirmos o gráfico tempo *versus* velocidade instantânea e compararmos com a velocidade média no Quadro 3, chegamos a Regra de Merton, a qual afirma que:

$$v_{Mi} = \frac{v_i + v_0}{2} = v_{mi}.$$

Assim, para t_1 temos que:

$$v_{M1} = \frac{v_1 + v_0}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -0.50 = \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} = v_{m1},$$

para t_2, $v_{M2} = \frac{v_2+v_0}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1.00 = \frac{h_2-h_0}{t_2-t_0} = v_{m2}$
e assim sucessivamente. Portanto, a velocidade em cada instante de tempo t_i é dada por $v(t_i) = -10t_i$.
Pela Regra de Merton, para $t_i \neq t_0 = 0$ segue que:

$$v_{Mi} = \frac{v_i+v_0}{2} = \frac{-10t_i+0}{2} = \frac{h_i-15}{t_i-0} = v_{mi},$$

donde concluímos que $h_i = 15 - 5{t_i}^2$.

Claramente, os tempos medidos representam uma sequência finita e portanto, um conjunto discreto de pontos. Mas como estamos trabalhando com quantidades mensuráveis, é natural a passagem da versão discreta para a contínua (Bassanezi 2022). Assim, $h(t) = 15 - 5t^2$, que representa uma restrição de uma função quadrática com domínio em $[0,\ t_f]$, sendo t_f o tempo de chegada do objeto ao solo, nesse caso $t_f = 1.73\ s$.

Observe que no processo descrito acima, partimos da definição de que se um corpo está em MUV, ele apresenta aceleração constante, e então sua posição (altura) é modelada por uma função quadrática em relação ao tempo. De forma recíproca, se consideramos que se um corpo está em MUV, sua posição é descrita por uma função quadrática, então esse corpo apresenta aceleração constante. Ao calcularmos a taxa de variação da taxa de variação da altura em relação ao tempo, obtemos uma constante que é a própria gravidade: $g = -10 = \frac{2(v_{m2}-v_{m1})\blacksquare}{t_2-t_1} = \frac{2(\Delta h_2/\Delta t_2-\Delta h_1/\Delta t_1)}{t_2-t_1} = \frac{2(-1.0-(-0.5))\blacksquare}{0.2-0.1}$;
$g = -10 = \frac{2(v_{m3}-v_{m2})\blacksquare}{t_3-t_2} = \frac{2(\Delta h_3/\Delta t_3-\Delta h_2/\Delta t_2)}{t_3-t_2}\frac{2(-1.5-(-1.0))\blacksquare}{0.3-0.2}$; e assim sucessivamente, chegando à caracterização de uma função quadrática.

Considerações finais

Neste artigo, foi apresentada uma proposta de atividade interdisciplinar que permite abordar a caracterização das funções quadráticas associadas a um problema clássico da cinemática. O estudo sobre o desenvolvimento do conceito de função a partir da cinemática e da Regra de Merton nos permitiu agrupar diversas propostas de metodologias de ensino em Educação Matemática (modelagem matemática, história da matemática e tecnologias) para a elaboração da atividade apresentada, a qual tem o discente como agente ativo do processo de ensino-aprendizagem.

A modelagem é uma área que vem crescendo bastante nos últimos anos, não só como abordagem de pesquisa, mas também como metodologia de ensino. Levantar hipóteses, chegar a equações e funções que descrevam certos fenômenos ou situações do cotidiano é fundamental para que o ser humano compreenda o mundo em que vive. É possível trazer diversas situações e vários desses fenômenos para dentro da sala de aula no ensino básico. Ao professor, cabe não só a tarefa de buscar recursos para motivar seu aluno, mas também, quando possível, destacar a aplicabilidade dos conteúdos. Assim, nossa proposta pedagógica visa contribuir com o professor, fornecendo-lhe um produto educacional que possa ser aplicado em sua sala de aula.

A atividade proposta, em suas características interdisciplinares, complementa a abordagem a partir de conceitos da física do teorema de caracterização de uma função quadrática presente em Dante (2016). Basicamente, Dante (2016) parte da definição que caracteriza o MUV por ser modelado por uma função quadrática e conclui que ao calcularmos as taxas de variação a partir dessa função, chegaremos que a taxa de variação da taxa de variação é constante e diferente de zero. Na atividade, que apresentamos, propomos a recíproca do teorema, isto é, consideramos que o MUV é definido como aquele em que o corpo tem aceleração constante e a partir do experimento com o PhET combinado a Regra de Merton, chegamos à conclusão de que o modelo que descreve a posição do corpo em relação ao tempo é uma restrição de uma função quadrática.

Na linguagem do ensino superior, o problema seria facilmente resolvido por meio de um problema de valor inicial descrito por uma equação diferencial de segunda ordem linear com duas condições iniciais. Entretanto, no ensino médio, os alunos não dispõem desses conceitos matemáticos. Desse modo, o artigo utiliza de uma adaptação da Regra de Merton, comprovada visualmente por Oresme, como um recurso para realizar o processo de transposição didática, da integração, e chegar à lei de formação esperada. Observa-se, portanto, a importância de estudos em história da matemática que considerem os desenvolvimentos teóricos dos problemas para a realização de adaptações curriculares necessárias.

Destacamos, que enquanto em um experimento em laboratório existem erros no processo de medição, na simulação, encontramos arredondamentos numéricos. Assim, ao tentarmos realizar o mesmo experimento para valores aproximados para a gravidade como: $g \approx 9.80$ e $g \approx 9.81$, dificuldades apareceram na interpretação da relação entre taxas de variação e funções quadráticas.

Por fim, salientamos que a compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos permite ao docente elaborar estratégias mais adequadas e mais compatíveis para um discente de educação básica. Destacamos que a abordagem interdisciplinar, característica presente na modelagem matemática, pode permitir que o estudante amplie sua noção de função a partir de associações da matemática com outras áreas do saber, ao mesmo tempo em que essas perspectivas favoreçam a compreensão e a aplicação dos conceitos matemáticos.

Agradecimentos

Os autores agradecem a leitura crítica e sugestões dos avaliadores.

Referências

Azevedo H.L., Monteiro Júnior F.N., Santos T.P., Carlos J.G. & Tancredo B.N. (2009) O uso do experimento no ensino de física: Tendência a partir do levantamento dos artigos em periódicos da área no Brasil. Florianópolis: VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências.

Barboza R.C. (2013) Ensino de funções: Uma discussão sobre o comportamento variacional de suas grandezas. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro.

Bassanezi R.C. (2022) Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto. 389 p.

Borba M.C. & Penteado M.G. (2019) Informática e educação matemática. 3° edição. Belo Horizonte: Autêntica. 108 p.

Borba M.C., da Silva R.S.R. & Ganadis G. (2020) Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática - Nova Edição: Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica. 160 p.

Boyce W.E. & DiPrima R.C. (2010) Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Volume 10. Rio de Janeiro: LTC. 607 p.

Boyer C.B. & Merzbach U.C. (2012) História da matemática (H. Castro, Trad.). São Paulo: Blucher. 503 p.

Brasil (2000) Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio): Parte I - Bases legais. Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC.

Brasil (2018) Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC.

Chaquiam M. (2017) Ensaios temáticos: História e matemática em sala de aula. Belém: SBEM. 241 p.

Chaves M.I.A. & Espírito Santo A.O. (2011) Possibilidades para modelagem matemática na sala de aula (p. 161–179). *In*: Almeida L.M.W., Araújo J. & Bisognin E. (Orgs). Práticas de modelagem matemática na educação matemática. Londrina: EDUEL. 312 p.

Colorado U. (2020) PhET, Interactive Simulations. Boulder. Disponível em: https://phet.colorado.edu/ (acessado em: 04/12/2022).

D'Ambrosio U. (1996). Educação matemática: Da teoria à prática. 8° edição. São Paulo: Papirus. 112 p.

Dante L.R. (2016) Matemática contexto e aplicações. 3° edição. São Paulo: Ática. 410 p.

Freiman V. (2018) A-musing with chess and the eight queens math puzzle: Looking for connections between problem-solving, technology, creativity, and affect in mathematics education (p. 549–570). *In*: Amado N., Carreira S. & Jones K. (Eds) Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect. Switzerland: Springer Nature. 590 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_25

Galilei G. (1988) Duas novas ciências, 2° edição. Museu de Astronomia e Ciências Afins/Nova Stella. São Paulo: Nova Stella. 288 p.

Giraldo V., Caetano P.A.S. & Mattos F.R.P. (2013) Recursos computacionais no ensino de matemática. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT/SBM. 473 p.

Hartnell M. & Knights C. (2011) Developing problem solving skills and cross-curricular approaches in mathematics utilizing ICT (p. 234–240). *In*: Oldknow A. & Knights C. (Eds) Mathematics education with digital technology: Education and digital technology. Continuum International Publishing Group. 304 p.

Mesa Y.M. & Ochoa J.A.V. (2009) La importancia de Galileo en la construcción histórica del concepto de función quadrática. *In*: Anais do IV Colóquio de História e Tecnologias no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: UERJ.

Rezende W.M. (2003) O ensino de cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica (p. 45–68). *In*: Machado N.J. & Cunha M.O. (Orgs) Linguagem, conhecimento, ação: Ensaios sobre epistemologia e didática. Escrituras. São Paulo: Escrituras. 352 p.

Rezende W.M. (2008) Dos escolásticos às novas tecnologias: Uma contribuição para o ensino da função quadrática. *In*: Anais do VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: UERJ

Romero S. (2017) Improving the teaching of mathematics with the use of technology: A commentary (p. 99–110). *In*: Aldon G., Hitt F., Bazzini L. & Gellert U. (Eds) Mathematics and technology: A C.I.E.A.E.M. sourcebook. Switzerland: Springer International Publishing. 963 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5_6

Santos-Trigo M., Aguilar-Magallón D. & Reyes-Martínez I. (2019) A mathematical problem-solving approach based on digital technology affordances to represent, explore, and solve problems via geometric reasoning (p. 145–167). *In*: Felmet P., Liljedahl P. & Koichu B. (Eds) Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development. Switzerland: Springer Nature. 410 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_8

Silva L.D. (2009) Estudo da noção de taxa de variação no ensino médio. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Porto Alegre, Rio Grande do Sul.

Vale I., Pimentel T. & Barbosa A. (2018) The power of seeing in problem solving and creativity: An issue under discussion (pp. 243–272). *In*: Amado N., Carreira S. & Jones K. (Eds) Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect. Switzerland: Springer Nature. 579 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_11

Vianna C.R. (1998) Usos didáticos para história da matemática. *In*: Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. Recife: SBHMat.